

Galilean transformation and motion equation for a moving object.

ニュートンの運動方程式は、中学の理科や高校の物理で教えられているものの、ガリレイの相対性理論についてはその存在に触れる程度であり、その本質が教えられていない。大学の物理学の教科書においてすら、ガリレイ変換と運動の法則との関連性の説明は十分でない。その主な理由は、我々が学ぶニュートンの運動法則が、物体が静止している場合も、また、一定速度で運動している場合をも、一緒くたにして取り扱っているために、その必要性が生じないからであろう。

前回までの説明において、我々は、運動の法則の適用を観測者に対して物体が静止している場合に限定した。そして、静止した物体が力の作用でいかように運動を獲得するかについて、運動方程式をもって説明した。それでは、「物体が観測者に対して一定速度で運動している場合の運動の法則はいかにあるべきか」が問われよう。ここに、ガリレイの相対性理論の必要性が現れる。

以下においては、静止している物体が運動を獲得するまでに限定されている運動の法則を、ガリレイ変換を適用することで、一定速度で運動している物体に対しても適用されることを示す。

ガリレイの相対性理論とは、ガリレイ変換に立脚する力学理論のことである。

物体の運動方向のみに限れば、ガリレイ変換は、次のように書ける。

$$t' = t \quad (1)$$

$$x' = x - vt \quad (2)$$

これらの式の右辺に示す変数は、観測者の測る物理量を表し、左辺に示すプライムの付く変数は、運動物体に設定される物理量を表す。その中で、 v は物体の相対速度を表す。 t 及び x は、それぞれ観測者の測る時間及び物体の運動方向に取った x 座標（空間座標）を表す。一方、 t' 及び x' は、それぞれ観測されている物体に付随した時間及び x' 座標を表す。

x 座標と x' 座標とは同一線上にあり、同じ方向を向いている。時間 $t=0$ の時点において、 $t'=0$ であり、座標 x と x' 座標とは原点を互いに重ねている。物体と x' 座標軸とは共に、 $t=t'=0$ の瞬間に x 座標軸の原点から正の方向に一定速度 v で運動を開始する。

ここで、ガリレイ変換の式(1)及び(2)を眺めつつ、新幹線を例えに出して、ガリレイ変換の意味を考えよう。説明をわかりやすくするために、線路の側から新幹線の運動を眺めている観測者を「静止系の観測者」と呼び、これに対して一定速度で運動している新幹線の中にいる観測者を「運動系の観測者」と呼ぶ。このようなとき、ガリレイ変換の式(1)及び(2)に見る x 及び t は、それぞれ静止系の観測者が測る座標及び時間を表す。一方、プライムの付いている x' 及び t' は、それぞれ新幹線の中にいる運動系の観測者が測る座標及び時間を表す。線路の側で静止している観測者（静止系の観測者）に対して、「線路にそって一定速度で運動している物体（運動物体）」を、一定速度で走る新幹線内に静置されている物体に置き換えることができる。なぜなら、線路の側で静止している観測者が、新幹線内に静置されている物体のみに着目して観察すると、それは、一定速度で運動している一個の運動物体とみな

せるからである。

線路の側に静止している観測者（静止系の観測者）が、一定速度で運動している新幹線に飛び乗ると、そこで目にするのは、新幹線内に座し静止している観測者（運動系の観測者）とその傍らに静置されている物体となる。このとき、新幹線内の観測者は、新幹線が動いているとはつゆ知らず、終始静止したままにあると説明している。新幹線内の観測者（運動系の観測者）は、時間 t' と座標 x' を用いて、傍らに静止している物体に力を作用させて、運動の法則を見出そうと実験を行っている。

新幹線内の観測者（運動系の観測者）が見いだす運動の法則は、次のようである。

- 1) 物体は、力の作用がなければ、観測者に対して静止し続ける慣性を有している。その静止慣性の大きさは、静止慣性質量をもって計られる。
- 2) 観測者が物体に力を作用させるとき、物体は同じ大きさで逆向きに力を返す。
- 3) 観測者と物体との間に力が作用するとき、両者間には相対速度が発生する。このとき、相対速度の発生量 dv は、作用力の大きさ f と力の作用時間 dt とに比例し、静止慣性質量 m に逆比例する。すなわち、次なる運動方程式が成立する。

$$mdv' = fdt' \quad (3)$$

新幹線内の観測者（運動系の観測者）が見出している運動の法則は、これまでに我々が議論して来た「静止系の観測者が見出す運動の法則」とまったく同じものとなっている。

式(3)における慣性質量及び力については、それぞれ m' 及び f' と書くべきであるが、相対性原理によって、物事は対象でなければならないことが前提とされるので、 $m' = m$ 、 $f' = f$ となっていることを暗黙裡としている。

線路の側に静止している観測者（静止系の観測者）が、一定速度で運動している新幹線に飛び乗って、新幹線内に座し静止している運動系の観測者の行う実験を眺めることを、物理学的には、静止系の観測者がガリレイ変換を適用するという。

静止系の観測者が新幹線に飛び乗って新幹線内を眺めることは、静止系の観測者が新幹線と同じ速度 v で走り（新幹線に伴走し）、新幹線内を眺めることと同じこととなる。このとき、新幹線に対して伴走者となる静止系の観測者は、 t 秒後には新幹線と同じ位置、 $x = vt$ にいる。これをガリレイ変換の式に代入すると（ガリレイ変換を適用すると）、次なる式が与えられる。

$$t' = t \quad (4)$$

$$x' = 0 \quad (5)$$

新幹線に飛び乗った静止系の観測者（伴走者）は、ガリレイ変換によってプライムの付く t' や x' を得る。このとき、 $x' = 0$ なので、静止系の観測者は、運動系の原点位置に座すことになる。その結果、新幹線に飛び乗った静止系の観測者に観測されることは、新幹線内に静止している観測者（運動系の観測者）の観測結果とまったく同じとなる。

線路の側で静止している静止系の観測者からは、「一定速度 v で運動している運動物体に力 f が作用し、速度変化 dv が現れた」と観測されることであるが、ガリレイ変換を適用した

静止系の観測者には、「目前に静止している物体が、力を受けて微小速度 dv' を得た」と観測される。

新幹線に飛び乗った静止系の観測者が、新幹線を飛び降りて、線路側の元の場所に戻ると、以前のように、一定速度で運動している新幹線が観測される。このように、ガリレイ変換を経た後の観測者が、元の観測場所に戻ることを、物理学においては、ガリレイ変換の逆変換を作用させるという。

逆変換は、新幹線内の x' 座標から元の x 座標に戻ることなので、式(2)を次のように変更することで与えられる。

$$x = x' + vt' \quad (6)$$

式(1)の存在に注意して、式(7)を時間で微分することで、次式が得られる。

$$dx/dt = dx'/dt' + v \quad (7)$$

この式に見る距離の時間微分を速度で書き換え、右辺の項の順序を入れ替えると、次式が得られる。

$$u = v + v' \quad (8)$$

ここに、 $u = dx/dt$ 、 $v' = dx'/dt'$ である。

式(8)の右辺に示すように、速度 u は、新幹線（あるいは、運動物体）の速度 v に、新幹線内で観測された運動物体が静止状態から獲得した微小速度 v' ($v' = dx'/dt'$) を加えて与えられる合成速度を表す。式(8)は、一般に、ガリレイの相対性理論における速度合成則と呼ばれる。

以上をまとめると、一定速度で運動している物体に対しては、以下の手続きを経て、新たな運動の法則が適用される。

- 1) ガリレイ変換を適用して、静止系の観測者から運動系の観測者の立場へ移る。
- 2) 一定速度で運動している運動物体は、観測者に対して静止している物体に化す。
- 3) 運動系の時間及び座標を用いて、観測者に対して静止している物体に新たな運動法則を適用し、静止物体が獲得する速度を求める。
- 4) ガリレイ変換の逆変換を適用して、運動系の観測者から元の静止系の観測者へ戻る。
- 5) ガリレイの相対性理論に基づく速度合成則によって、運動物体の速度変化及び合成速度が確定する。

以上に見るように、ガリレイ変換は、運動物体に対して運動の法則を成立させるための基盤となる。ニュートンの時代には、ガリレイの相対性理論に対する認識が十分でなかった。そのため、従来のニュートンの運動法則には、本来あるべき運動の法則とガリレイの相対性理論とが混在する形にあったと言える。ここまでの議論によって、我々は、ガリレイの相対性理論と運動法則とを独立させて、運動の法則をより一般化したことになる。